Elementos de calibración de una proyección central

Javier Múgica de Rivera

9 de noviembre de 2004

1. Cálculo del punto principal de mejor simetría

Conocemos la distorsión radial correspondiente a un punto principal inicial (aproximado) y a una distancia focal también aproximada. El punto principal inicial, p_0, puede ser el centro fiducial, el punto principal de autocolimación o cualquier otro que queramos. El valor de focal inicial puede ser un valor nominal. De cara a obtener el p.p. de mejor simetría la focal respecto a la cual tengamos referida la función de distorsión es indiferente, así que la focal la denotaremos por f sin importarnos cuál de los posibles valores es.

Supongamos que tenemos valores de la función de distorsión a lo largo de las cuatro semidiagonales.

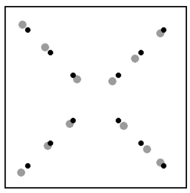
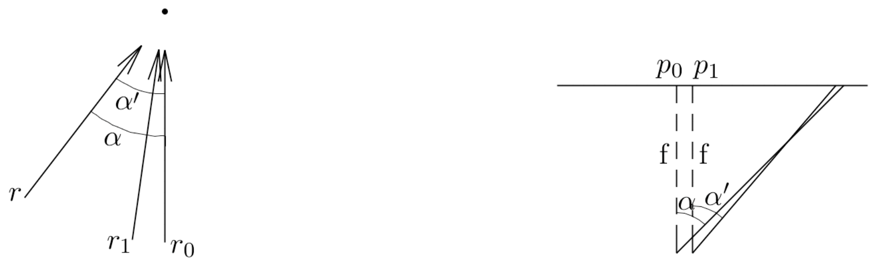


Figura 1

Los puntos grises son las posiciones reales de los puntos en las fotografías y los puntos negros la posición teórica. Variando la focal y la posición del punto principal modificamos la posición teórica de los puntos, así que seleccionamos dichos parámetros de manera que la función de distorsión resultante cumpla unas ciertas condiciones: que sea "pequeña" (variación de la focal) y que sea simétrica (variación del punto principal).

p_0 es la imagen de un cierto rayo de entrada r_0. Dado otro rayo r cuya imagen es p, la distancia teórica a la que debe estar p de p_0 es $\mathrm{f}\tan\alpha$, siendo α el ángulo que forma r con r_0 y f la focal (la que convencionalmente hayamos adoptado). Si pasamos a tomar otro punto p_1 como punto principal, el rayo de entrada principal es ahora r_1. El ángulo que forma ahora r con el rayo de entrada principal es α', y la distancia teórica entre p y p_1 es distinta que la que teníamos antes entre p y p_0. Esta variación teórica es en su mayor parte un reflejo de la variación de p_0 a p_1. Si la variación entre las distancias teóricas fuese exactamente la diferencia entre p_0p y p_1p la posición teórica de los puntos seguiría siendo la misma, y la distorsión radial no variaría. Pero esto no es así. Lo veremos con un ejemplo en el que los puntos p_0, p_1 y p están alineados, que es el caso en el que mejor se ve.



Entrada

Salida teórica en cada caso

Figura 2

La variación $\alpha' - \alpha$ es $-\varepsilon/\mathrm{f}$. La nueva distancia teórica es

$$x' = \mathrm{f}\tan\alpha' = \mathrm{f}\tan(\alpha - \varepsilon/\mathrm{f}) = \mathrm{f}\tan\alpha + \mathrm{f}(1+\tan^2\alpha)(-\varepsilon/\mathrm{f}) + \ldots \approx x - \varepsilon(1+\tan^2\alpha)$$

Lo que significa que la posición teórica del punto se ha movido $-\varepsilon(1+\tan^2\alpha)+\varepsilon = -\varepsilon\tan^2\alpha$.

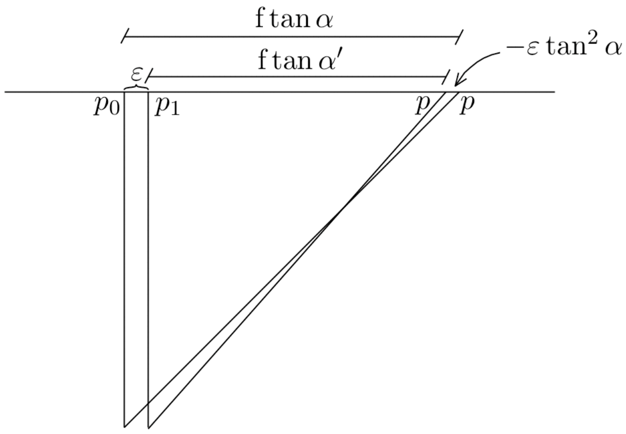


Figura 3

Los puntos que están a la derecha, con x positiva, disminuyen su distancia teórica, con lo que aumentan su distorsión (si ε es positivo). Para los que están a la izquierda, aunque α es ahora negativo, al ir $\tan\alpha$ elevado al cuadrado el signo de $-\varepsilon\tan^2\alpha$ sigue siendo el mismo. Pero un desplazamiento negativo significa, a la izquierda de p_0, un alejamiento.

En el caso de que p esté en la perpendicular a p_0p_1, el cambio al pasar de α a α' es una variación en la coordenada x de $-\varepsilon$, lo que significa que el punto permanece en el mismo sitio.

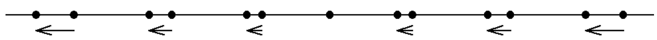


Figura 4

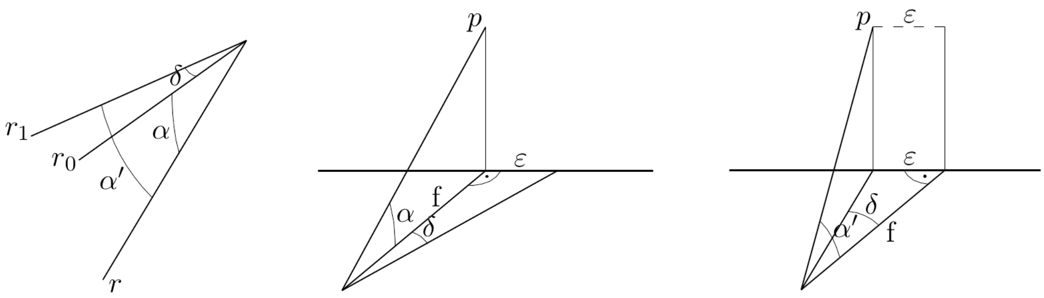


Figura 5: Rayo perpendicular a p_0p_1

Entonces, podemos descomponer el desplazamiento del punto principal en dos componentes en la dirección de las diagonales. De esta forma calculamos cada componente de manera independiente, ya que cada una afecta a los valores de la distorsión radial en su correspondiente diagonal y no en la otra.

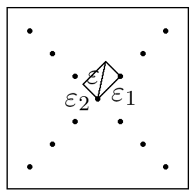


Figura 6

Para cada semidiagonal conocemos los valores de la distorsión radial para determinadas distancias, que se corresponden con ciertos ángulos α. Los denotamos por e_α. Cuando estemos considerando una semidiagonal, las distorsiones de la semidiagonal opuesta son $e_{-\alpha}$. Para cada diagonal tenemos que calcular ε de manera que los valores de la distorsión sean "lo más simétricos posible". Para eso tenemos que establecer algún criterio de simetría. Podemos minimizar $\sum |e_\alpha - e_{-\alpha}|$, pero la minimización de la función valor absoluto es bastante complicada. Resulta mucho más sencillo minimizar $\sum (e_\alpha - e_{-\alpha})^2$.

Para el punto principal inicial tenemos los valores e_α y $e_{-\alpha}$. Tras el desplazamiento son $e_\alpha + \varepsilon \tan^2 \alpha$ y $e_{-\alpha} - \varepsilon \tan^2 \alpha$ (la variación de la distorsión tiene signo contrario a la variación de la distancia).

$$\left((e_\alpha + \varepsilon \tan^2\alpha) - (e_{-\alpha} - \varepsilon \tan^2\alpha)\right)^2 = \left((e_\alpha - e_{-\alpha}) + 2\varepsilon \tan^2\alpha\right)^2 =$$

$$= (e_\alpha - e_{-\alpha})^2 + 4(e_\alpha - e_{-\alpha})\varepsilon \tan^2\alpha + 4\varepsilon^2 \tan^4\alpha$$

$$\sum \left((e_\alpha - e_{-\alpha})^2 + 4(e_\alpha - e_{-\alpha})\varepsilon \tan^2\alpha + 4\varepsilon^2 \tan^4\alpha\right) =$$

$$\sum (e_\alpha - e_{-\alpha})^2 + 4\varepsilon \sum (e_\alpha - e_{-\alpha}) \tan^2\alpha + 4\varepsilon^2 \sum \tan^4\alpha$$

Minimizar esta cantidad equivale a minimizar $\varepsilon \sum (e_\alpha - e_{-\alpha}) \tan^2\alpha + \varepsilon^2 \sum \tan^4\alpha$. Derivando:

$$\sum (e_\alpha - e_{-\alpha}) \tan^2\alpha + 2\varepsilon \sum \tan^4\alpha = 0$$

$$\varepsilon = -\frac{\sum (e_\alpha - e_{-\alpha}) \tan^2\alpha}{2\sum \tan^4\alpha} \tag{1}$$

Una vez que tenemos ε_1 y ε_2 pasamos a ε_x y ε_y.

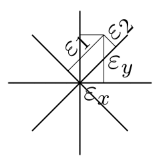


Figura 7

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1/\sqrt{2} - \varepsilon_2/\sqrt{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1/\sqrt{2} + \varepsilon_2/\sqrt{2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

1.1. Interpretación geométrica

Desplazar el punto principal es lo mismo que tomar otro rayo de entrada como dirección principal, lo que a su vez equivale a girar el fotograma.

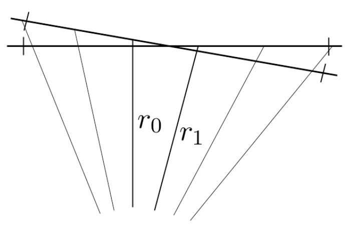


Figura 8

En la Figura 8 se muestran las dos imágenes teóricas, según cuál sea el punto principal que consideremos. Situar el punto principal hacia la derecha supone en prácticamente todos los puntos un desplazamiento hacia la izquierda.

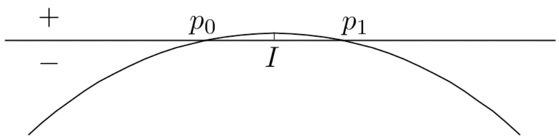


Figura 9

En la Figura 9 los desplazamientos a la derecha se indican con signo positivo. Cuando el punto principal es p_0, el rayo cuya imagen es p_1 forma un cierto ángulo con el rayo principal, que da una distancia teórica p_0p_1. Si pasamos a considerar que el punto principal es p_1 (que permanece fijo), el ángulo de los rayos correspondientes a p_0 y p_1 sigue siendo el mismo (como cualquier ángulo: el haz de rayos de entrada no varía; sólo varía la consideración de uno u otro como rayo principal) por lo que la distancia teórica sigue siendo la misma, como se puede ver gráficamente en la Figura 8. La intersección de la recta de corte de las dos imágenes con la recta p_0p_1 es el isocentro. Podemos ver que en la primera imagen está a una cierta distancia de p_0 y a una distancia algo mayor de p_1. En la segunda está más próximo a p_1 que a p_0. Por lo tanto el isocentro se ha desplazado hacia la derecha. Por otra parte también se puede ver que cualquier punto a la derecha del isocentro está más próximo a él en la segunda imagen que en la primera; es decir, que respecto al isocentro se ha desplazado hacia la izquierda. Los puntos a la izquierda en la segunda imagen están más alejados, por lo que también se han desplazado hacia la izquierda. Esto quiere decir que todos los puntos se desplazan hacia la izquierda con respecto al isocentro, o lo que es lo mismo, que el isocentro es el punto de máximo desplazamiento hacia la derecha. Este análisis geométrico tiene interés en el caso de la fotografía inclinada. En lo que se refiere al cambio de punto principal, las variaciones de posición entre los dos puntos principales son de tercer orden (para un desplazamiento de 15μm y un focal de 150mm, el desplazamiento del isocentro es $0{,}15 \cdot 10^{-12}$ m). Al ser totalmente despreciables podemos simplificar y pensar, como hicimos antes, que a la derecha del punto principal la distancia teórica disminuye y a la izquierda aumenta (en este caso que hemos desplazado el punto principal a la derecha). También estamos despreciando, aunque no lo hemos mencionado hasta ahora, la distorsión en p_1. Para hallar la variación de posición teórica en los puntos de la fotografía fuera de la línea p_0p_1 utilizamos las siguientes premisas:

1. Conocemos la variación a lo largo de la línea p_0p_1
2. Las rectas perpendiculares a p_0p_1 en la imagen original lo siguen siendo tras cambiar el punto principal
3. Los ángulos con vértice en el isocentro se conservan

Los puntos 2 y 3 tienen sencillas demostraciones geométricas, inmediata la del 2 y no tanto la del 3. A continuación se muestra cómo las anteriores condiciones permiten obtener la nueva posición de cualquier punto.

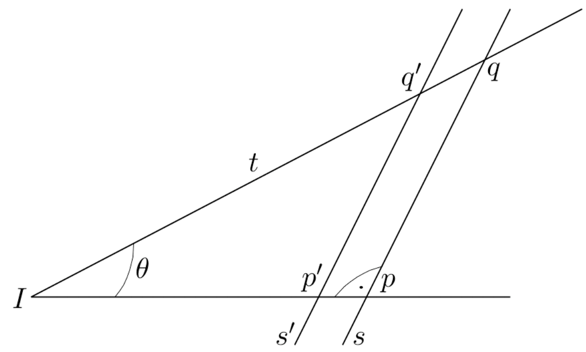


Figura 10

Mediante 1 sabemos que el punto p pasa a la posición p'. A continuación aplicando 2 tenemos que la recta s se transforma en s'. Por último, la propiedad 3 implica que la recta t permanece invariante. De modo que la posición de q' es la intersección de s' y t. Si el esquema anterior estuviese a escala, los puntos p_0, I y p_1 cabrían todos en la representación de un punto $\cdot$. Por lo tanto el desplazamiento radial que un punto cualquiera sufre en dirección al isocentro podemos identificarlo con un desplazamiento en dirección al punto principal. Dicho en otras palabras, la variación de posición de cualquier punto de la fotografía al cambiar el punto principal es una variación radial. **El cambio de punto principal no supone una variación en la distorsión tangencial**.

$$\Delta r = q'q = p'p/\cos\theta = -\varepsilon \tan^2 \alpha_p/\cos\theta$$

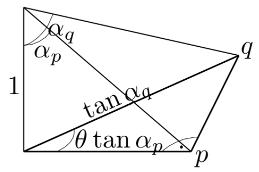


Figura 11

$$\longrightarrow \qquad \tan\alpha_p = \tan\alpha_q \cos\theta$$

$$-\varepsilon \tan^2 \alpha_p/\cos\theta = -\varepsilon \tan^2 \alpha_q \cos^2\theta/\cos\theta = -\varepsilon \tan^2 \alpha_q \cos\theta$$

$$\Delta r = -\varepsilon \tan^2 \alpha \cos\theta \tag{4}$$

2. Distancia focal

Sea f_0 una focal inicial, r_0 la distancia teórica de un punto para esa focal, r' la distancia real al punto principal y Δr la distorsión. Se cumple entonces

$$r' = r_0 + \Delta r \tag{5}$$

Si cambiamos la focal la distancia teórica varía:

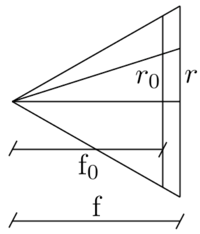


Figura 12

Al modificar la focal estamos escalando todo el fotograma, por lo que la variación de r es proporcional a la variación de la focal, es decir,

$$r = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}_0} r_0 \tag{6}$$

$$r = \frac{\mathrm{f}_0 + \Delta \mathrm{f}}{\mathrm{f}_0} r_0 = \left(1 + \frac{\Delta \mathrm{f}}{\mathrm{f}_0}\right) r_0 = r_0 + \frac{\Delta \mathrm{f}}{\mathrm{f}_0} r_0 \tag{7}$$

Entonces la distorsión varía $-\frac{\Delta \mathrm{f}}{\mathrm{f}} r_0$.

La Figura 13 muestra varias funciones de distorsión en las que lo único que varía es la distancia focal.

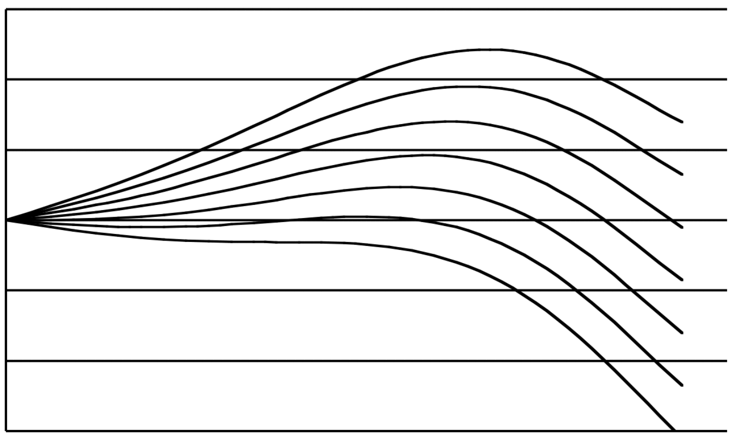


Figura 13: Variación de la distorsión radial al variar la focal

Si la función de distorsión la tenemos expresada como un polinomio impar,

$$r' = r + \Delta r = r + \left(a_1 r + a_3 r^3 + a_5 r^5 + \ldots\right) \tag{8}$$

El término $a_1 r$ lo podemos incluir en la distancia teórica:

$$r' = (r + a_1 r) + \big(a_3 r^3 + a_5 r^5 + \ldots\big)$$

Lo que supone variar la focal,

$$\mathrm{f} = (1 + a_1)\mathrm{f}_0 \tag{9}$$

Sea r_n el nuevo valor y r_a el antiguo. $r_\mathrm{n} = (1 + a_1) r_\mathrm{a} \ \Rightarrow \ r_\mathrm{a} = r_\mathrm{n}/(1 + a_1)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} r' &= r_\mathrm{n} + (a_3 r_\mathrm{a}^3 + a_5 r_\mathrm{a}^5 + \ldots) = r_\mathrm{n} + \Big(a_3 \left(r_\mathrm{n}/(1 + a_1)\right)^3 + a_5 \left(r_\mathrm{n}/(1 + a_1)\right)^5 + \ldots\Big) \\ r' &= r_\mathrm{n} + \Big(\tfrac{a_3}{(1+a_1)^3} r_\mathrm{n}^3 + \tfrac{a_5}{(1+a_1)^5} r_\mathrm{n}^5 + \ldots\Big) \end{aligned}$$

De esta manera conseguimos una función de distorsión sin término lineal, lo que gráficamente significa que sale del origen tangente al eje de abscisas. Los nuevos coeficientes en función de los antiguos son

$$\frac{a_3}{(1 + a_1)^3} \quad , \quad \frac{a_5}{(1 + a_1)^5} \quad , \quad \ldots$$

Podemos despreciar las variaciones de los coeficientes a_3 y posteriores, de modo que en la práctica para obtener la función de distorsión con $a_1 = 0$ simplemente hacemos $\mathrm{f} = (1 + a_1)\mathrm{f}_0$ y el término $a_1 r$ lo eliminamos sin más.

Pretender tener en cuenta esas variaciones para obtener *la máxima precisión* es completamente absurdo. Despreciar dichas variaciones equivale a introducir en la función de distorsión r_a en lugar de r_n; es decir, que estamos asignando a un punto situado a una distancia r_n la distorsión correspondiente a r_a. r_n y r_a se diferenciarán en unas pocas micras, del orden de la propia distorsión, por lo que sus respectivos valores de distorsión tendrán una diferencia del orden de la milésima de micra, y que yo sepa no se hace fotogrametría con tanta precisión.

Este valor de la focal tiene la propiedad de ser el que mejor se ajusta a la zona central del fotograma, pero por el contrario suele dar lugar a valores de distorsión muy elevados en los bordes. En la Figura 13 se corresponde con la tercera empezando por abajo. A la vista de las gráficas parece que la mejor función de distorsión sería la cuarta, o una intermedia entre la tercera y la cuarta. Pensemos además que si la función no tuviese punto de inflexión se dispararía mucho más para los valores extremos, ya que comenzaría tangente al eje de abscisas y se iría curvando cada vez más siempre en el mismo sentido. Por ello es mejor emplear otro criterio para escoger una focal: un criterio que dé lugar a valores de distorsión bajos para todo el fotograma.

Por ejemplo, que la distorsión a una cierta distancia r_c valga cero. Si su valor para la focal f_0 es Δr_c, entonces habrá que modificar la focal de manera que para ese punto la distorsión varíe

$$-\Delta r_c = (-\Delta r_c / r_c) r_c$$

Por lo tanto la nueva focal ha de valer

$$\mathrm{f} = (1 + \Delta r_c/r_c)\mathrm{f}_0 \tag{10}$$

El nuevo coeficiente a_1 es $a_1 - \Delta r_c/r_c$.

Este criterio suele dar un mal resultado en el caso de que la función de distorsión tenga punto de inflexión. En ese caso es muy probable que la función quede como la segunda empezando por abajo en la Figura 13; el punto a distancia r_c tiene un valor de distorsión muy próximo al máximo relativo, lo que implica que la distorsión en casi todos los puntos del fotograma es menor que cero, dando lugar a una de las soluciones más extremas.

En definitiva, si lo que queremos es una función de distorsión que se aleje lo menos posible de cero en todo el fotograma, ese es precisamente el criterio que debemos tomar:

$$|\Delta r_\mathrm{M}| = |\Delta r_\mathrm{m}|. \tag{11}$$

Tomamos los valores máximo y mínimo de los puntos en los que conocemos valores de distorsión o, mejor, los máximo y mínimo que alcanza la función de distorsión. Uno de los dos valores seguramente sea el extremo del fotograma, y el otro un máximo o mínimo intermedio que tomamos a ojo. Como cada vez que se aplica un criterio, se trata de variar la focal o lo que es lo mismo el valor a_1. El nuevo valor será $a_1 - t$. El valor de distorsión máximo será ahora $\Delta r_\mathrm{M} - t\,r_\mathrm{M}$ y el mínimo $\Delta r_\mathrm{m} - t\,r_\mathrm{m}$, por lo que su valor absoluto será $|\Delta r_\mathrm{m}| + t\,r_\mathrm{m}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta r_\mathrm{M} - t\,r_\mathrm{M} &= |\Delta r_\mathrm{m}| + t\,r_\mathrm{m} \\
\Delta r_\mathrm{M} - |\Delta r_\mathrm{m}| &= t(r_\mathrm{M} + r_\mathrm{m})
\end{aligned}$$

$$t = (\Delta r_\mathrm{M} - |\Delta r_\mathrm{m}|)/(r_\mathrm{M} + r_\mathrm{m}) \tag{12}$$

Si estábamos muy lejos de la solución necesitaremos reiterar el proceso, ya que el extremo relativo que antes estaba en r_M o r_m habrá variado de posición.

Se pueden tomar criterios más complicados para definir el concepto de función de distorsión "pequeña", pero no merece la pena. Desde mi punto de vista el criterio riguroso para definir la focal es que la distorsión resultante para esa focal no de lugar a un factor de escala total, para lo cual tenemos que definir de alguna manera el factor de escala total, pero eso será objeto de otro artículo en el que se tratará de manera más detallada la función de distorsión.

Cuando no estemos trabajando con cámaras métricas también puede resultar conveniente incluir parámetros de distorsión radial asimétrica, aunque estemos trabajando con el punto de mejor simetría.

3. Distorsión tangencial

Hasta ahora hemos considerado la diferencia entre la posición real de un punto y su posición teórica en su componente radial, r. La otra componente es la tangencial.

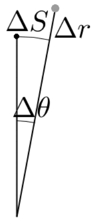


Figura 14: Componentes radial y tangencial de la distorsión

Para establecer completamente la posición teórica de los puntos falta determinar el giro κ, que fijamos como siempre arbitrariamente. Queda perfectamente definido si fijamos que la distorsión tangencial de un rayo cualquiera que tomemos sea cero. El ángulo θ sobre la fotografía teórico de los demás rayos queda definido por la diferencia de ángulos θ entre los rayos de entrada, que ha de ser la misma que sobre la fotografía.

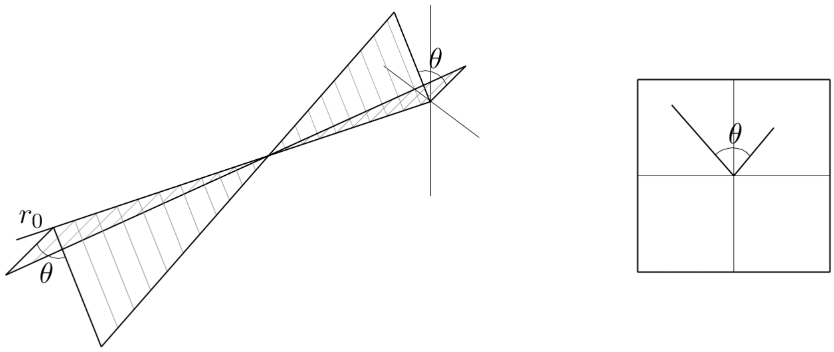


Figura 15: El ángulo θ que forman los rayos de entrada es el mismo sobre la fotografía

Hay que señalar que en la recta que une el punto principal con el punto con distorsión tangencial cero que hemos tomado como referencia la distorsión tangencial no será cero en general.

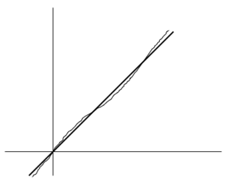


Figura 16

Sin embargo, cuando se modeliza la distorsión tangencial suele tomarse como lugar geométrico de los puntos con distorsión cero una recta que pasa por el punto principal. La distorsión tangencial en primera aproximación tiene el siguiente aspecto:

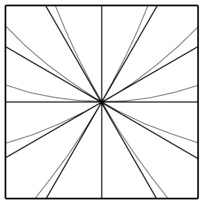


Figura 17: Distorsión tangencial en primera aproximación

Las líneas rectas representan la posición teórica y las curvas la real. Si hubiésemos tomado otro punto como punto de referencia con distorsión cero, las posiciones teóricas variarían un ángulo constante (precisamente la distorsión $\Delta\theta$ que tenía el punto que ahora tomamos como referencia).

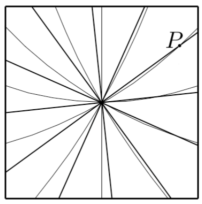


Figura 18

Evidentemente la distorsión tangencial real no se ajustará al modelo, pero se puede buscar el modelo que mejor se ajuste a la situación real. Por lo tanto en la práctica la distorsión tangencial no se define fijando un punto con distorsión cero, sino que se buscan los parámetros del modelo que mejor se ajusten a la imagen. En el modelo que hemos representado los parámetros son el ángulo de la recta con distorsión cero y cómo de grande es la distorsión; más concretamente:

$$\Delta S = c\, r^2 \sin(\theta - \theta_0)$$

Que también podemos escribir como

$$\Delta S = c_1\, r^2 \sin\theta + c_2\, r^2 \cos\theta \qquad (13)$$

Se pueden añadir componentes que dependan de $\sin(2\theta)$ y $\cos(2\theta)$.

Estas componentes trigonométricas tienen la ventaja de que el movimiento angular total de la fotografía resultante de aplicar la corrección por distorsión tangencial es cero, lo que no ocurrirá si tomamos arbitrariamente un punto de referencia, que dará un giro total $\Delta\theta$ (la distorsión que en el modelo irrotacional correspondería al punto de referencia). Parece lógico exigir que la corrección por distorsión tangencial dé lugar a una rotación global cero, ya que de lo contrario podríamos descomponerla en un pequeño giro κ y una distorsión sin rotación global (la misma quitándole el giro κ). Esto se tratará más detalladamente en el artículo correspondiente a la distorsión.

4. Sobre las diferentes elecciones posibles

Partimos de unos valores iniciales para los parámetros geométricos, a saber: focal, punto principal (x e y) y giro κ, que definen la posición teórica de la imagen en relación con los ejes fiduciales; lo que a su vez, por diferencia con la imagen real, nos da la función de distorsión. Esta función se aplicará a las imágenes obtenidas con esa cámara para obtener una imagen que se corresponda con una proyección central. La perfección de ésta vendrá determinada por la precisión con la que se obtuvo la función de distorsión. Podemos varíar los parámetros f, x_{pp}, y_{pp}, κ, con el objeto de obtener una función de distorsión que cumpla ciertos requisitos, pero su precisión seguirá siendo exactamente la misma. Podríamos trabajar con la focal nominal y el centro fiducial. El punto principal de mejor simetría tiene la ventaja, si la simetría es suficientemente buena, de que podemos trabajar con una función de distorsión radial que dependa sólo de r, pero es simplemente una cuestión de comodidad, al igual que la condición giro κ total cero, que permite eliminar de la distorsión tangencial el elemento constante $\Delta\theta_0$. Respecto a la focal, es totalmente indiferente.